Zadaci za vježbanje i diskusiju iz predmeta Linearna algebra 2

Preduslov: Pročitati osmo i deveto poglavlje udžbenika

1. Neka je A simetrična matrica dimenzija $n \times n$. Koja od sljedećih tvrđenja su tačna (dokazati ili navesti kontraprimjer):

a) A je invertibilna ako i samo ako $\lambda = 0$ nije svojstvena vrijednost A.

b) Svi korijeni karakterističnog polinoma matrice A su realni.

c) Svojstveni vektori matrice A koji odgovaraju različitim svojstvenim vrijednostima su međusobno ortogonalni.

d) Ako A ima linearno nezavisne vektore v i w, onda je $\langle v, w \rangle = 0$.

e) Ako je A pozitivno definitna, onda je ona invertibilna.

f) Ako je A pozitivno definitna, onda su svi njeni dijagonalni elementi pozitivni brojevi.

2. Koja od sljedećih tvrđenja su tačna:

a) Ako je B neka kvadratna matrica, tada je $A = B^T B$ pozitivno definitna ako i samo ako je B invertibilna.

b) Ako je B neka realna matrica, onda su matrice BB^T i $B^T B$ simetrične nenegativno definitne.

c) Ako je C anti-simetrična matrica (tj. $C = C^T$), tada za svaki vektor v važi $\langle v, Cv \rangle$.

3. Pokazati da su svi dijagonalni elementi anti-simetrične matrice jednaki nuli.

4. Pokazati da su svi korijeni karakterističnog polinoma anti-simetrične matrice čisto imaginarni brojevi.

5. Ako je A anti-simetrična matrica dimenzija $n \times n$, gdje je n neparan broj, onda je $det\, A = 0$. Dokazati.

6. Neka matrica A preslikava ortonormiranu bazu u drugu ortonormiranu bazu. Pokazati da je A ortogonalna matrica.

7. Pokazati da skup svih ortogonalnih matrica dimenzija $n \times n$ sa operacijom množenja čini grupu.

8. Neka matrica A preslikava neki ortonormirani sistem vektora u ortonoramirani sistem. Da li možemo tvrditi da je A ortogonalna matrica?

9. Jedina matrica koja je istovremeno ortogonalna, simetrična i pozitivno definitna je jedinična matrica. Pokazati.

10. Matrica A je ortogonalna ako i samo ako njene vrste čine ortonormirani sistem vektora. Pokazati.

11. Neka je A ortogonalna matrica dimenzija 3×3 i $det\, A = 1$. Tada je $\lambda = 1$ svojstvena vrijednost matrice A. Dokazati.

12. Neka je A ortogonalna matrica čija je jedna vrsta $(\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \frac{2}{3})$. Naći matricu A.